|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Место занятия в расписании** | | **Тема** | **Цели** | | **Задачи** | **Контрольныевопросы и задания** | **Д/з** |
| Дата | 12.10.21 | **Неопределенный интеграл. Основные свойства и методы интегрирования.** | Дидактическая | Изучить понятие первообразной, неопределенного интеграла, ознакомить с видами задач на первообразную, с основными методами интегрирования, начать формирование умений и навыков вычисления первообразных. | 1) Определить понятие первообразной.  2) Ознакомить с видами задач на вычисление первообразной.  3) Начать формирование умений и навыков вычисления первообразной.  4) Определить неопределенный интеграл и его основные свойства.  5) Рассмотреть основные методы интегрирования. | 1) Определите первообразнуюфункции.  2)Чем отличаются первообразные одной функции?  3) Как определяется неопределенный интеграл?  4) Назовите элементы неопределенного интеграла?  5) Всегда ли можно найти неопределенный интеграл?  6)Сформулируйте основную теорему интегрального исчисления.  7) Назовите свойства неопределенного интеграла.  8) С помощью каких компьютерных пакетов программ можно находить неопределенные интегралы? | Изучить и составить конспект, найти множество первообразных для функций:  *f*(*x*) = ( - 2)²;  *f*(*x*) = (4х + )²;  *f*(*x*) = ∙ ∙ ;  *f*(*x*) = (2х + ) ∙ (3 - 7х). |
| Группа | 1СТМ | Развивающая | Развивать логическое и аналитическое мышление. |
| Пара | IV | Воспитательная | Воспитывать любознательность и самостоятельность. |
| № занят. | 14 |

Подтвердите своё присутствие на занятии. Составьте конспект в соответствии с требованиями, решите самостоятельно практическое задание, решите домашнее задание. Фото конспекта отправьте на почту **elenabragina7@gmail.com** до 12.10.21 включительно. Работа должна быть выполнена в рамках рабочего времени, отведенного на занятие по математике.

**12.10**

**Неопределенный интеграл. Основные свойства и методы интегрирования.**

**1) Начинаем изучение первообразной функции. Мотивация изучения (ознакомиться).**

Практически для каждого понятия математики существует обратное понятие. Для производной это понятие называется первообразной. Как же оно появляется?

Допустим, нам необходимо посчитать производную следующей функции:

f(х) =

Мы знаем такую формулу:

()' = n ∙

Считается эта производная элементарно:

( = 3 ∙

Посмотрим внимательно на полученное выражение и выразим :

=

Но мы можем записать и так, согласно определению производной:

=

А теперь внимание: то, что мы только что записали и есть определением первообразной.

Теперь мы можем сформулировать четкое определение.

Первообразной функции называется такая функция, производная которой равна исходной функции.

**2) Определим понятие первообразной (записать в конспект).**

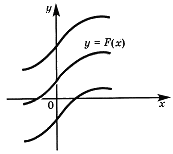
**Определение.** Функция F (x) называется первообразной для функции f (x) на данном промежутке, если для любого х из данного промежутка F'(x)= f (x).

**Основное свойство первообразных.**

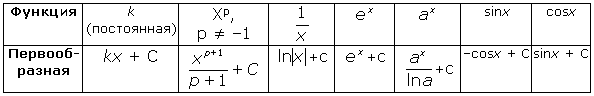
Если F (x) – первообразная функции f (x), то и функция F (x)+ C , где C –произвольная постоянная, также является первообразной функции f (x) (т.е. все первообразные функции f(x) записываются в виде F(x) + С ).

**Геометрическая интерпретация.**

Графики всех первообразных данной функции f (x) получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси Оу.



**Таблица первообразных некоторых элементарных функций.**



**Правила нахождения первообразных .**

Пусть F(x) и G(x) – первообразные соответственно функций f(x) и g(x). Тогда:

1.  F (*x*) ± G (*x*) – первообразная для *f*(*x*) ± *g*(*x*);

2.  *а*F (*x*) – первообразная для *а f*(*x*);

3. C:\Users\Елена\Desktop\3.gif – первообразная для *а f*(*kx + b*).

**3) Рассмотрим задачи, которые можно решать на первообразную (записать в конспект).**

На первообразную можно составлять и решать **следующие задачи:**

**1. Найти любую одну первообразную функции. Для решения этой задачи необходимо найти первообразную функции, пользуясь правилами нахождения первообразной и таблицей, добавить в конце любое число.**

**Пример 1.** Найти любую одну первообразную функции f(х) = - 3х + 5.

Решение.

F(х) = (первообразная суммы равна сумме первообразных и применим таблицу) = - +5х + 1 (в конце прибавляем или вычитаем любое число).

**Пример 2.** Найти любую одну первообразную функции f(х) = + 2х - 4. **Решить самостоятельно.**

**2. Найти множество первообразных функции. Для решения этой задачи необходимо найти одну первообразную функции и в конце добавить постоянную С.**

**Пример 3.**  Найти множество первообразных функции *f*(*x*) = (х - 3) ∙ (х³ + 4х).

Решение.

У нас нет правила вычисления первообразной произведения. Поэтому необходимо упростить функцию: раскрыть скобки и привести подобные слагаемые (если они есть).

*f*(*x*) =  + 4 - 3 х³ - 12х.

Найдем первообразную, пользуясь правилами и таблицей, в конце добавим постоянную величину С:

F(х) = + - - + С = (сократим, если можно) = + - - 6 + С.

**Пример 4.** Найти множество первообразных функции *f*(*x*) = ( + х) ∙ (3 - 2). **Решить самостоятельно.**

**3. Найти одну первообразную, график которой проходит через заданную точку. Для решения этой задачи необходимо найти множество первообразных функции, подставить координаты точки в первообразную, найти значение постоянной С и записать одну первообразную, график которой проходит через заданную точку.**

**Пример 5.** Найти первообразную для функции *f*(*x*) = 4х, график которой проходит через точку (2;3).

Решение.

Найдем множество первообразных для заданной функции:

F(х) = + С.

Сократим:

F(х) = 2 + С.

Подставим в первообразную вместо F(х) вторую координату точки - число 3, а вместо х первую координату точки - число 2:

3 = 2 ∙ + С.

Поменяем местами левую и правую части равенства и решим уравнение относительно С:

2 ∙ + С = 3;

8 + С = 3;

С = 3 - 8;

С = -5.

Подставим значение С в найденную первоначально первообразную (выделено синим):

F(х) = - 5.

**Пример 6.** Найти первообразную для функции *f*(*x*) = 9, график которой проходит через точку (0;1). **Решить самостоятельно.**

**На что необходимо обратить внимание при вычислении первообразной функции:**

**- функция должна быть табличной или представлять собой сумму табличных функций;**

**- если первое условие не выполняется, то функцию необходимо привести к первому виду при помощи упрощений.**

**4) Рассмотрим понятие неопределенного интеграла, его основные свойства и таблицу неопределенных интегралов (записать в конспект).**

Множество всех первообразных некоторой функции f(x) называется неопределенным интегралом функции f(x) и обозначается как

**∫f(x)dx.**

Таким образом, если F - некоторая первообразная, то справедливо выражение

**∫f(x)dx=F(x)+C**, где C - произвольная постоянная.

Термин «интеграл» происходит от латинского слова иntegralis - цельный.

Символ ∫ (курсивное) начальная буква слова summa (сумма).

Слово «неопределенный» подчеркивает, что в первообразную входит постоянное слагаемое, которое можно взять произвольно.

Выражение *f (x) dх* называют **подынтегральным выражением,** функцию f (x) - **подинтегральной функцией,** переменную *х*-**переменной интег­рирования.**

**Свойства неопределенного интеграла.**

В приведенных ниже формулах f и g - функции переменной x, F - первообразная функции f и a,k,C − постоянные величины.

* ∫[f(x)+g(x)]dx=∫f(x)dx+∫g(x)dx
* ∫kf(x)dx=k∫f(x)dx
* ∫f(ax)dx=1aF(ax)+C
* ∫f(ax+b)dx=1aF(ax+b)+C

**Таблица интегралов**

В формулах ниже предполагается, что a, p(p≠1), C − - действительные постоянные, b − основание показательной функции (b≠1,b>0).

|  |  |
| --- | --- |
| ∫adx=ax+C | ∫xdx=x22+C |
| ∫x2dx=x33+C | ∫xpdx=xp+1p+1+C |
| ∫dxx=ln|x|+C | ∫exdx=ex+C |
| ∫bxdx=bxlnb+C | ∫sinxdx=−cosx+C |
| ∫cosxdx=sinx+C | ∫tanxdx=−ln|cosx|+C |
| ∫cotxdx=ln|sinx|+C | ∫secxdx=ln∣∣tan(x2+π4)∣∣+C |
| ∫cscxdx=ln∣∣tanx2∣∣+C | ∫sec2xdx=tanx+C |
| ∫csc2xdx=−cotx+C | ∫secxtanxdx=secx+C |
| ∫cscxcotxdx=−cscx+C | ∫dx1+x2=arctanx+C |
| ∫dxa2+x2=1aarctanxa+C | ∫dx1−x2=12ln∣∣1+x1−x∣∣+C |
| ∫dxa2−x2=12aln∣∣a+xa−x∣∣+C | ∫dx√1−x2=arcsinx+C |
| ∫dx√a2−x2=arcsinxa+C | ∫dx√x2±a2=ln∣∣x+√x2±a2∣∣+C |
| ∫dxx√x2−1=arcsec|x|+C | ∫sinhxdx=coshx+C |
| ∫coshxdx=sinhx+C | ∫sech2xdx=tanhx+C |
| ∫csch2xdx=−cothx+C | ∫sechxtanhxdx=−sechx+C |
| ∫cschxcothxdx=−cschx+C | ∫tanhxdx=lncoshx+C |
|  |  |

**5) Рассмотрим основные методы вычисления неопределенных интегралов (записать в конспект).**

Следует отметить, что существование интеграла определяется следующей основной теоремой интегрального исчисления.

***Теорема 1.* Всякая непрерывная функция имеет первообразную.**

Однако эта теорема не утверждает, что первообразную данной непрерывной функции можно найти с помощью конечного количества известных действий и подать результат в элементарных функциях. Более того, существуют непрерывные элементарные функции, интегралы от которых не являются элементарными функциями. Такие функ­ции называют **интегрированными.** Их интегралы не могут бу­ть найдены с помощью конечного числа элементарных функций.

Заметим, что по правилам дифференциального исчисления для любой элементарной функции можно найти ее производную (также элементарную). В интегральном исчислении такие правила для отыскания первоначальной *принципиально невозможны.*

Первообразные для неинтегрируемых функций находят приближенными (многочисленными) методами.

В общем нахождения неопределенных интегралов - задача, существенно сложнее по сравнению с дифференцированием. Ее решения упрощается благодаря применению математических справочников и компьютерных пакетов программ, например МаthCAD, Маthematiса 3.0 т.

**Наиболее важными методами интегрирования являются:**  
1) метод непосредственного интегрирования (метод разложения),  
2) метод подстановки (метод введения новой переменной),  
3) метод интегрирования по частям.

**I. Метод непосредственного интегрирования**

Задача нахождения неопределенных интегралов от многих функций решается методом сведения их к одному из табличных интегралов.

**II. Метод подстановки (интегрирование заменой переменной)**

Если функция x=φ(t) имеет непрерывную производную, то в данном неопределенном интеграле ∫f(x)dx всегда можно перейти к новой переменной t по формуле

∫f(x)dx=∫f(φ(t))φ'(t)dt

Затем найти интеграл из правой части и вернуться к исходной переменной. При этом, интеграл стоящий в правой части данного равенства может оказаться проще интеграла, стоящего в левой части этого равенства, или даже табличным. Такой способ нахождения интеграла называется методом замены переменной.

**III. Метод интегрирования по частям**

Метод интегрирование по частям основан на следующей формуле:

∫udv=uv-∫vdu

где u(x),v(x) –непрерывно дифференцируемые функции. Формула называется формулой интегрирования по частям. Данная формула показывает, что интеграл ∫udv приводит к интегралу ∫vdu, который может оказаться более простым, чем исходный, или даже табличным.

Примеры вычисления неопределенных интегралов при помощи основных методов интегрирования рассмотрим на следующем занятии.

**6) Домашнее задание: изучить и составить конспект, найти множество первообразных для функций:**

***f*(*x*) = ( - 2)²; *f*(*x*) = (4х + )²; *f*(*x*) = ∙ ∙ ; *f*(*x*) = (2х + ) ∙ (3 - 7х).**